

# Záróbeszámoló a K69027 számú OTKA pályázathoz

Fleiner Tamás

2012. június 28.

## 1. A kutatással kapcsolatos tevékenységek bemutatása

A szóban forgó kutatás egyik legfontosabb összetevője a résztvevők különféle kompetenciáit szintetizáló együttműködés volt. Ezen belül is különösen fontos a sikeresen megvalósult és a jövőben is folytatni tervezett nemzetközi együttműködés. Ennek egyik legfontosabb eleme Biró Péter szoros együttműködése a glasgowi algoritmikus csoporttal (David Manlove, Rob Irving, Gregg O'Malley, Eric McDermid), aminek kapcsán az elméleti eredmények mellett több gyakorlati alkalmazás fejlesztésében vettek részt. Fleiner Tamás szlovák szerzőtársával, Katarína Cechlárovával dolgozott eredményesen több témán, de japán szerzőtársakkal is érdekes, új eredményeket ért el, amelyek továbbfejlesztése napirenden van.

Az fenti együttműködés számos munkalátogatás, workshop- ill. konferenciárészvétellel keretében történt. Mindezen kívül kutatócsoportunk aktívan vesz részt az általunk kutatott témában nemrégiben létrehozott, közgazdászokat, játékelméletben kutató kollégákat és algoritmikus érdeklődésű csoportokat egyesítő Matching in Practice kutatóhálózatban aminek a nevében is jelzett célja a gyakorlati alkalmazások keresése és az ezekkel kapcsolatos kutatás koordinálása. A hálózat 2011 novemberében tartott workshopja Budapesten került megrendezésre, Biró Péter szervezésében.

## 2. Az elért eredmények bemutatása

A kutatás eredményei 15 folyóiratcikkben, számos konferenciakiadványban, egy MSc disszertációban ill. 2 technical reportban jelentek meg.

A konferencián is előadott [1] eredmény a hazai felsőoktatási felvételi rendszert vizsgálja. Itt az azonos pontszámmal jelentkező diákokat egy adott szakon vagy mind felveszik, vagy mind elutasítják. A cikkben definiáljuk a stabil ponthatárok fogalmát és megmutatjuk, hogy a Gale-Shapley algoritmus általánosításával hatékonyan találhatunk ilyen megoldásokat.

A [2] cikkben gyengén polinomiális algoritmust adunk fél-egész stabil allokáció keresésére nempáros gráfok esetén.

A [3] cikk motivációja a hazai egyetemi felvételi rendszer. A probléma két speciális esetével foglalkozunk: alsó kvóták esetén megmutatjuk, hogy a probléma NP-nehéz

válí, míg közös kvóták esetén azt látjuk be, hogy ha a közös kvóták egymást tartalmazó halmazokra vonatkoznak, akkor hatékony algoritmussal tudunk találni stabil megoldást. Ha azonban nem ilyen a halmazrendszer, akkor a probléma NP-nehéz.

A [4] cikkben a rezidens allokációs problémának azt az esetét vizsgáljuk, amikor a házaspárok közös preferencia-listákat adhatnak meg. Itt egyrészt új bonyolultsági eredményeket bizonyítunk, másrészt heurisztikákat implementálunk és tesztelünk véletlen mintákon.

A [5] cikkben egy olyan „párosítási játékot” elemzünk, amely a kétoldali hozzárendelési játék egyoldali változata. Hatékony algoritmust adunk a mag ürességének eldöntésére, illetve megmutatjuk, hogy ha egy játék magja nem üres, akkor a nukleolusz szintén gyorsan kiszámítható; viszont, ha a játék magja üres, akkor a blokkoló párok számának minimalizálásának problémája NP-nehéz.

A [6] cikk egy összefoglaló tanulmány a rezidens allokációs problémának arról a változatáról, amiben esetleges házastársak létezése miatt további feltételeket kell kielégítenie a keresett megoldásnak.

A [7] cikkben azt mutatjuk meg, hogy egy minimális számú blokkoló párt adó párosítás keresése akkor is NP-nehéz feladat, sőt bizonyos konstans faktornál jobban nem is approximálható, ha a preferenci-listák korlátosak. Egy konkrét algoritmus segítségével felső becslést is adunk erre az approximálhatósági faktorra.

A [8] cikkben azt a kérdést vizsgáljuk, hogy a párosítás mérete milyen viszonyban áll a párosítás stabilitásával. Megmutatjuk, hogy ha maximális méretű párosításokkal dolgozunk, akkor a blokkoló élek számának minimalizálása NP-nehéz feladat, sőt approximálni sem lehet azt.

A vesecseré probléma modellezhető korlátos hosszú körök pakolási problémájaként irányított gráfokban. A [9] cikkben megmutatjuk, hogy 3 illetve ennél nagyobb korlát esetén a probléma APX-nehéz, és adunk egy exponenciális idejű, de kis és ritka gráfokon jól működő egzakt algoritmust a probléma megoldására, amit a gyakorlatban is használtunk az Egyesült Királyság vesecseré programjában.

A 3D stabil párosítás probléma egy speciális esetéről megmutatjuk, hogy NP-nehéz [10]. Ebből az eredményből közvetlenül következik, hogy a korlátos hosszú stabil cserék problémája is NP-nehéz, ha a megengedett körök hosszának korlátja legalább 3.

A [11] cikkben a házaspárok jelenlétével nehezített párosítás probléma egy általánosítását vizsgáljuk. Az NP-nehéz problémára közelítő megoldásokat adunk, és emellett egy speciális részesetere hatékony algoritmust konstruálunk.

A [12] cikkben lakáspiacok magjának, pareto-optimális megoldásának ill. egyensúlyi helyzetének keresésére mutatunk hatékony eljárást ill. bizonyítunk NP-teljességet jól ismert gráfelméleti fogalmak alkalmazásának segítségével.

Hatfield és Milgrom egy korábbi ünnepezt eredményét [20] általánosítjuk a [13] cikkben, ahol rámutatunk Tarski-féle fixponttétellel való kapcsolatra és egy olyan gyakorlati szempontból is érdekes munkaerőpiaci stabilitási problémára, aminek kezeléséhez a mi eredményünk szükséges.

Az [14] áttekintő cikk a stabil párosítás probléma általánosításainak fixpontos kezeléséről ill. ezen problémák egymásra történő visszavezetésével kapcsolatos eredmé-

nyeink összefoglalója.

Az [15] eredmény bevezeti a matematikai és közgazdasági szempontból is egyaránt érdekes stabil folyam fogalmát, és ennek létezését igazolja, ill. hatékony eljárást ad a megtalálására. A stabil folyam a közgazdaságtanból jól ismert ellátási lánc egy lehetséges modellje.

Az [16] a stabil párosításokat általánosítja nem feltétlenül páros gráfokra, ahol a csúcsokhoz tartozó kiválasztási függvények igen általánosak. Ebben a modellben mutatjuk meg stabil félpárosítás létezését, és ehhez Irving algoritmusát általánosítjuk.

Az [17] eredmény páros gráfok listaszínezésével foglalkozik: Galvin módszerét is használva az mutatjuk meg, hogy triviális szükséges feltételek teljesülése esetén páros gráfoknak létezik kiegyensúlyozott listaszínezése.

A [18] cikk nempáros gráfbeli szuperstabil párosítás keresésére ad hatékony algoritmust, és egyúttal általánosítja Irving korábbi, stabil párosítást kereső algoritmusát.

A [19] eredmény Huang egy korábbi eredményét terjeszti ki, és mutat rá, hogy egészen szokatlan matroidok bevezetésével az alsó kvótákkal rendelkező egyetemi felvételi feladat megoldására van hatékony algoritmus.

## Hivatkozások

- [1] Péter Biró. Student admissions in Hungary as Gale and Shapley envisaged. 2008. Submitted to *Games and Economic Behavior*.
- [2] Péter Biró and Tamás Fleiner. The integral stable allocation problem on graphs. *Discrete Optim.*, 7(1-2):64–73, 2010.
- [3] Péter Biró, Tamás Fleiner, Robert W. Irving, and David F. Manlove. The college admissions problem with lower and common quotas. *Theoret. Comput. Sci.*, 411(34-36):3136–3153, 2010.
- [4] Péter Biró, Robert W. Irving, and Ildikó Schlotter. Stable matching with couples: an empirical study. *ACM J. Exp. Algorithmics*, 16:Paper 1.2, 27, 2011.
- [5] Péter Biró, Walter Kern, and Daniël Paulusma. Computing solutions for matching games. *International Journal of Game Theory*, 41(1):75–90, 2012.
- [6] Péter Biró and Flip Klijn. Matching with couples: a multidisciplinary survey. 2011. Accepted by *International Game Theory Review*.
- [7] Péter Biró, David F. Manlove, and Eric McDermid. "Almost stable" matchings in the roommates problem with bounded preference lists. 2012. Accepted by *Theoretical Computer Science*.
- [8] Péter Biró, David F. Manlove, and Shubham Mittal. Size versus stability in the marriage problem. *Theoret. Comput. Sci.*, 411(16-18):1828–1841, 2010.

- [9] Péter Biró, David F. Manlove, and Romeo Rizzi. Maximum weight cycle packing in directed graphs, with application to kidney exchange programs. *Discrete Math. Algorithms Appl.*, 1(4):499–517, 2009.
- [10] Péter Biró and Eric McDermid. Three-sided stable matchings with cyclic preferences. *Algorithmica*, 58(1):5–18, 2010.
- [11] Péter Biró and Eric McDermid. Matching with sizes (or scheduling with processing set restrictions). 2012. Accepted by *Discrete Applied Mathematics*.
- [12] Katarína Cechlárová and Tamás Fleiner. Housing markets through graphs. *Algorithmica*, 58(1):19–33, 2010.
- [13] Rashid Farooq, Tamás Fleiner, and Akihisa Tamura. Matching with partially ordered contracts. 2012. Accepted by *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*.
- [14] Tamás Fleiner. Stable matchings through fixed points and graphs. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, 51:69–116 (2009), 2008.
- [15] Tamás Fleiner. On stable matchings and flows. In *Graph-theoretic concepts in computer science*, volume 6410 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 51–62. Springer, Berlin, 2010.
- [16] Tamás Fleiner. The stable roommates problem with choice functions. *Algorithmica*, 58(1):82–101, 2010.
- [17] Tamás Fleiner and András Frank. Balanced list edge-colourings of bipartite graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 36:837–842, 2010.
- [18] Tamás Fleiner, Robert W. Irving, and David F. Manlove. An algorithm for a super-stable roommates problem. *Theoret. Comput. Sci.*, 412(50):7059–7065, 2011.
- [19] Tamás Fleiner and Naoyuki Kamiyama. A matroid approach to stable matchings with lower quotas. In *Proceedings of the Twenty-Third Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 135–142. SIAM, 2012.
- [20] John William Hatfield and Paul Milgrom. Matching with contracts. *American Economic Review*, 95(4):913–935, 2005.